Численный метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов

Ю.Г. Смирнов, М.Ю. Медведик, М.А. Москалева

Пензенский государственный университет

25 сентября 2018 г.

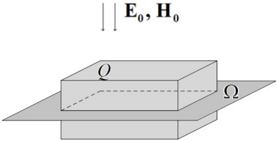

Рис. 1 Тело Q и экран Ω.

Диэлектрическая проницаемость [1]

$$\hat{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_e \hat{I}, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \bigcup \bar{\Omega}), \\ \hat{\varepsilon}_j(x), & x \in \bar{Q}_j, \end{cases} \tag{1}$$

причем $\hat{\varepsilon}_j = \hat{\varepsilon}_j^T$, $\mathrm{Im}\, \hat{\varepsilon}_j \geq 0$.

Свободное пространство однородно и изотропно с постоянными ε_e и μ_e:

$$\begin{gathered} \mathrm{Im}\, \varepsilon_e \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\, \mu_e \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\, k_e \geqslant 0, \\ k_e = \omega \sqrt{(\varepsilon_e \mu_e)}. \end{gathered} \tag{2}$$

Требуется определить (полное) электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, \mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + j_{0,E}, \\ \mathrm{rot}\, \mathbf{E} = i\omega\mu_e \mathbf{H}, \end{cases} \tag{3}$$

в $x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \bigcup \bar{\Omega})$;

условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = \mathbf{0}; \tag{4}$$

краевым условиям на поверхности экрана Ω

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}; \tag{5}$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3); \tag{6}$$

условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\frac{\partial\left(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s\right)}{\partial r} - ik_e\left(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s\right) = o\left(\frac{1}{r}\right),\ r \to \infty, \tag{7}$$

где $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ – рассеянное поле, $r = |\ x\ |$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Теорема ([2])

Задача дифракции (3) – (7) имеет единственное квазиклассическое решение.

Система интегро-дифференциальных уравнений

Задача (3)–(7) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \hat{\xi}\mathbf{J} - \left(k_e{}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right) \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy - \\ \qquad - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e{}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y = \mathbf{E}_{0,Q}(x),\ x \in Q, \\ \Big(- \left(k_e{}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}\right) \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy - \\ - \frac{1}{i\omega\varepsilon_e}\left(k_e{}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}_\tau\right) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y \Big)_\tau = \mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

$$\hat{\xi} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_e}^{-1} - \hat{I}\right), \tag{9}$$

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(x)}{\varepsilon_e} - \hat{I}\right)\mathbf{E}. \tag{10}$$

В операторной форме (8) имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{L}}(\mathbf{V}) = \mathbf{f}_0; \tag{11}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}_1 + \hat{\boldsymbol{L}}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

операторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{K}_1$ и $\boldsymbol{K}_2$ задаются как

$$\boldsymbol{A}\mathbf{J} := \hat{\xi}\mathbf{J}(x) - ({k_e}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{S}\mathbf{u} := \left(-\frac{1}{i\omega\varepsilon_e} ({k_e}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y \right)_\tau, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{K}_1\mathbf{u} := -\frac{1}{i\omega\varepsilon_e} ({k_e}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{K}_2\mathbf{J} := \left(-({k_e}^2 + \operatorname{grad}\operatorname{div}) \int\limits_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy \right)_\tau, \tag{16}$$

$\mathbf{V} = (\mathbf{J}, \mathbf{u})$, $\mathbf{f}_0 = (\mathbf{E}_{0,Q}, \mathbf{E}_{0,\tau})$.

Численный метод. Дискретизация задачи

Построим на системе Θ обобщенную расчетную сетку [3].
Разобьем экран Ω и тело Q на элементарные ячейки, являющиеся конечными элементами.

$$P_{k_1k_2} = \{x = (x_1, x_2),\ k_l h_l < x_l < (k_l + 1)h_l,\ l = 1, 2\}, \tag{17}$$

где $k = (k_1, k_2)$, $k_l = 0, \dots, n-1$.

$$\begin{gathered}\Pi^1_{j_1j_2j_3} = \{x : x_{1,j_1-1} < x_1 < x_{1,j_1+1},\\ x_{2,j_2} < x_2 < x_{2,j_2+1},\ x_{3,j_3} < x_3 < x_{3,j_3+1}\},\\ x_{1,j_1} = a_1 + \frac{a_2-a_1}{n} j_1,\ x_{2,j_2} = b_1 + \frac{b_2-b_1}{n} j_2,\ x_{3,j_3} = c_1 + \frac{c_2-c_1}{n} j_3,\end{gathered} \tag{18}$$

где $j_1 = 0, \dots, n-2$; $j_2, j_3 = 0, \dots, n-1$.

Число носителей на экране Ω: $N_1 = 2n(n-1)$, на теле Q: $N_2 = 3n^2(n-1)$, на системе Θ: $N = N_1 + N_2$.
Базисные функции на экране Ω

$$\varphi_k(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 - x_{1,k-1}, x_2 - x_{2,k-1}, x_3 - x_{3,k-1}) \frac{l_k}{S_k^+} \text{ в } P_k^+, \\ (x_{1,k+1} - x_1, x_{2,k+1} - x_2, x_{3,k+1} - x_3) \frac{l_k}{S_k^-} \text{ в } P_k^-, \end{cases} \tag{19}$$

где l_k – длина ребра k, S_k^+ и S_k^- – площади P_k^+ и P_k^-, соответственно.
Базисные функции на теле Q

$$\psi^1_{j_1,j_2,j_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1}|x_1 - x_{1,j_1}|, & \text{в } \Pi^1_{j_1,j_2,j_3}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{20}$$

где $h^1 := |x_{1,j_1} - x_{1,j_1-1}|$. Функции $\psi^2_{j_1,j_2,j_3}$ и $\psi^3_{j_1,j_2,j_3}$ определяются соответственно.

Численный метод. СЛАУ

Матричное уравнение системы (11) имеет вид

$$\mathbf{LV} = \mathbf{f}; \tag{21}$$

причем основная матрица является блочной

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{11} & \mathbf{L}^{12} \\ \mathbf{L}^{21} & \mathbf{L}^{22} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

$$\mathbf{L}^{11}_{pq} = \int\limits_{Q} \hat{\xi}(x)\psi_q(x)\psi_p(x)dx -$$

$$- \int\limits_{Q} \left(k_e^2 + \mathbf{grad}_x\ \mathrm{div}_x\right) \int\limits_{Q} G(x,y)\psi_q(y)dy\psi_p(x)dx, \tag{23}$$

$$\mathbf{L}^{22}_{pq} = \frac{1}{\omega^2\varepsilon_e^2} \int\limits_{\Omega} \Big(\left(k_e^2 + \mathbf{grad}_x\ \mathrm{div}_x\right) \int\limits_{\Omega} G(x,y)\varphi_q(y)ds_y\Big)_\tau \varphi_p(x)ds_x, \tag{24}$$

$$\mathbf{L}^{12}_{pq} = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_e} \int\limits_{Q} \left(k_e^2 + \mathbf{grad}_x\ \mathrm{div}_{\tau,x}\right) \int\limits_{\Omega} G(x,y)\varphi_q(y)ds_y\psi_p(x)dx, \tag{25}$$

$$\mathbf{L}^{21}_{pq} = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_e} \int\limits_{\Omega} \Big(\left(k_e^2 + \mathbf{grad}_x\ \mathrm{div}_x\right) \int\limits_{Q} G(x,y)\psi_q(y)dx\Big)_\tau \varphi_p(x)ds_y. \tag{26}$$

Основная матрица уравнения (21) является симметричной. Блок $\mathbf{L}^{21}$ совпадает с транспонированным блоком $\mathbf{L}^{12}$: $\mathbf{L}^{21} = \left(\mathbf{L}^{12}\right)^T$.

Численные результаты

Рассмотрим систему $\boldsymbol{\Theta}$, в которой экран $\boldsymbol{\Omega}$ пересекает тело $\boldsymbol{Q}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right);\ x_3 = 0\right\}}, \\ \boldsymbol{Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_k \in \left(-\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}\right)\right\}}, \quad \boldsymbol{k = 1, 2, 3.} \end{cases}$$

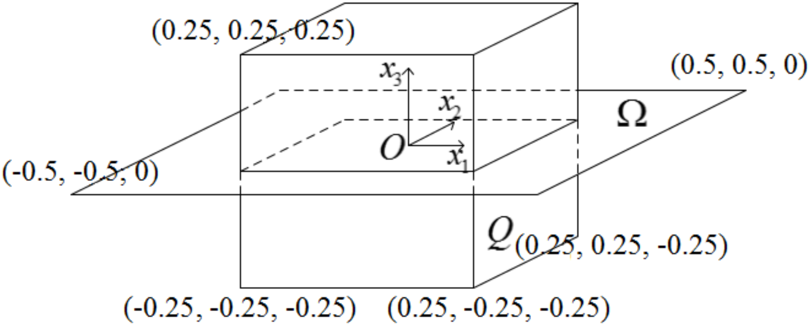

Рис. 2 Система $\boldsymbol{\Theta}$.

Численные результаты

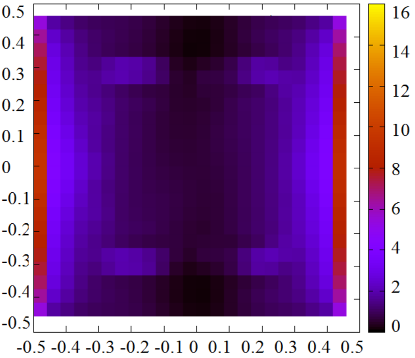

Рис. 3a Экран Ω.

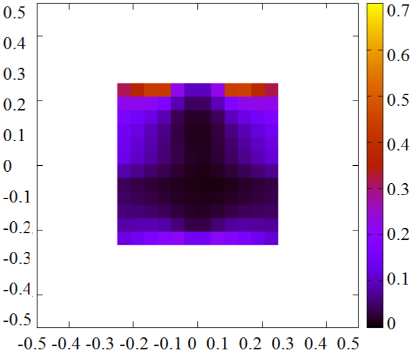

Рис. 3b Тело Q.

Численные результаты

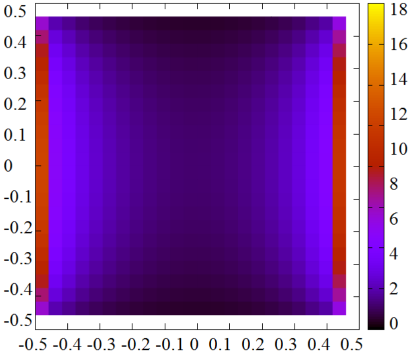

Рис. 4a Экран Ω.

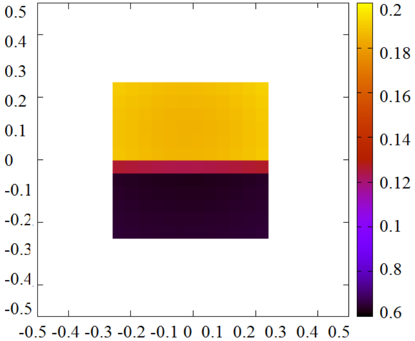

Рис. 4b Тело Q.

Параллельный алгоритм

Порядка 80% времени, затрачиваемого на численное решение задачи, приходится на вычисление матричных коэффициентов, которые вычисляются независимо друг от друга. Матрицы имеют размерность порядка 10^4. Элементы матрицы представляют собой шестикратные объемные интегралы, четырехкратные поверхностные интегралы и пятикратные объемные и поверхностные интегралы. Основная вычислительная сложность заключается расчета блока матрицы $\mathbf{L}^{11}$.

Элементы матрицы $\mathbf{L}$ размещаем в одномерный массив $\{A_I\}$ размера N^2. Количество коэффициентов C массива $\{A_I\}$, которое необходимо вычислить на каждом процессе, стараемся распределить равномерно [4]:

$$C = \begin{cases} \left[\frac{N}{p}\right] + 1, & p < \left\{\frac{N}{p}\right\}, \\ \left[\frac{N}{p}\right], & p \geqslant \left\{\frac{N}{p}\right\}, \end{cases} \tag{27}$$

где p – номер процесса, $\left[\frac{N}{p}\right]$ – целая часть деления, $\left\{\frac{N}{p}\right\}$ – остаток от целочисленного деления.

Размер S матрицы $\mathbf{L}$ вычисляется как

$$S := S_{11} + S_{12} + S_{21} + S_{22}, \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} S_{11} &:= \text{size}(\mathbf{L}^{11}) = \left(3n^2(n-1)\right)^2, \\ S_{12} &:= \text{size}(\mathbf{L}^{12}) = \left(3n^2(n-1)\right)\left(2n(n-1)\right), \\ S_{21} &:= \text{size}(\mathbf{L}^{21}) = \left(3n^2(n-1)\right)\left(2n(n-1)\right), \\ S_{22} &:= \text{size}(\mathbf{L}^{22}) = \left(2n(n-1)\right)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

При $n = 10$ объем матрицы $= 124$ Mb; при $n = 20$ объем матрицы $= 8.3$ Gb; при $n = 30$ объем матрицы $= 95$ Gb.

- при $p = 8$ скорость вычислений возрастает примерно в 8 раз;
- при $p = 16$ скорость вычислений возрастает примерно в 15 раз;
- при $p = 32$ скорость вычислений возрастает примерно в 26 раз;
- при $p = 64$ скорость вычислений возрастает примерно в 40 раз.

- **Смирнов Ю.Г.** Математические методы исследования задач электродинамики. -Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.
- **Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.** Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. -Москва: РУСАЙНС, 2016.
- **Медведик М.Ю., Москалева М.А.** Исследование задачи дифракции электромагнитных волн на неплоских экранах различной формы субиерархическим методом // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 60. №6. С. 570–580.
- **Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.** Параллельные вычисления. -СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

Спасибо за внимание!