



**УНИВЕРСИТЕТ  
ЛОБАЧЕВСКОГО**

Институт Информационных технологий, математики и механики  
Кафедра Математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий

# **Программный комплекс DMORSy для переупорядочения разреженных матриц на кластерных системах**

Пирова А.Ю.,  
Мееров И.Б.,  
Козинов Е.А.

Москва, 24-25 сентября 2018 г.

# Содержание

---

- ❑ Разложение Холецкого
- ❑ Метод вложенных сечений
- ❑ Программная реализация для систем с общей памятью
- ❑ Алгоритм многоуровневого метода вложенных сечений для систем с распределенной памятью
- ❑ Результаты вычислительных экспериментов
- ❑ Заключение



# Разложение Холецкого (1)

- Пусть дана система линейных уравнений:

$$Ax = b \quad (1)$$

$A$  – разреженная симметричная положительно определенная матрица,  $b$  – плотный вектор,  $x$  – вектор неизвестных.

- Прямой метод решения – разложение Холецкого:

$$A = LL^T \quad (2)$$

$L$  – нижнетреугольная матрица, называемая *фактором* матрицы  $A$

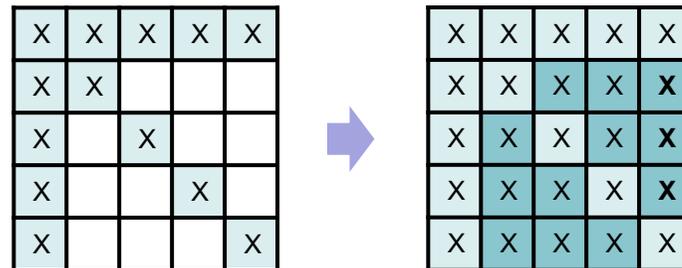
- Переход к решению треугольных систем

$$Lx = b, L^T y = x \quad (3)$$

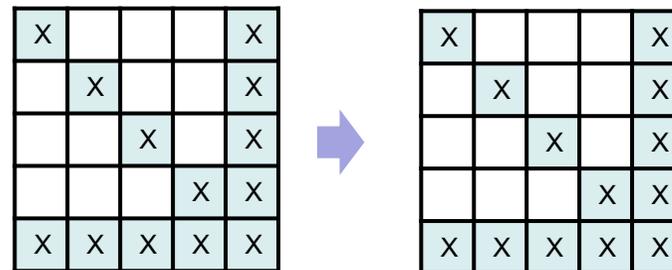


# Разложение Холецкого (2)

- Особенность разложения в разреженном случае – *заполнение* (снижение разреженности) фактора  $L$ :



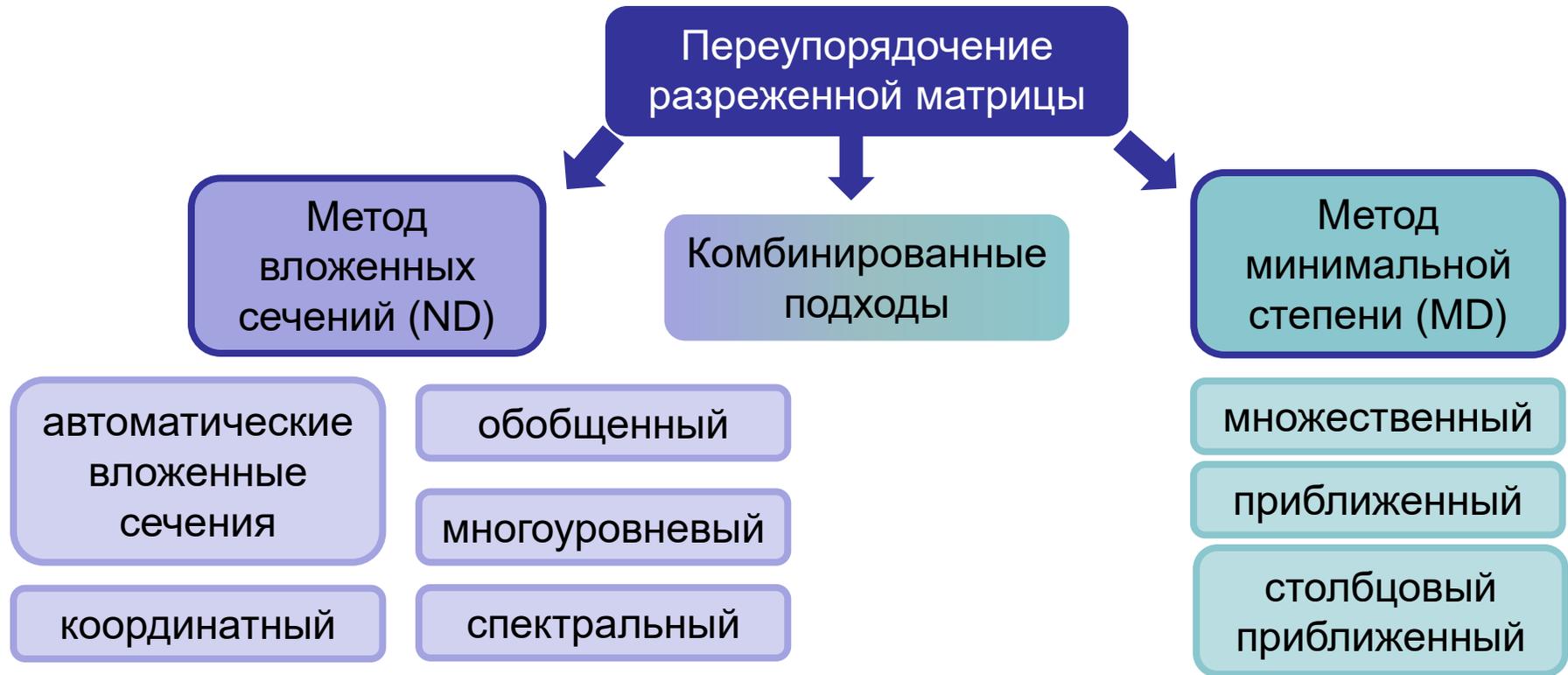
- Способ снизить заполнение – переупорядочение строк и столбцов матрицы:  $(PAP^T)(Px) = Pb$ , где  $P$  – матрица перестановки



- Задача нахождения такой перестановки NP-полная (Yannakakis, 1981).

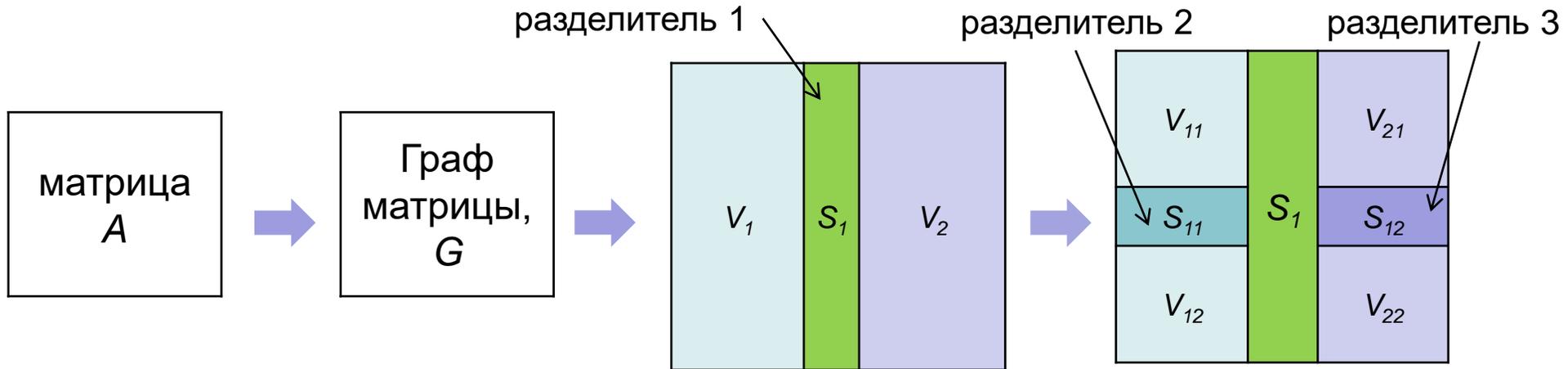


# Методы переупорядочения графов разреженных матриц

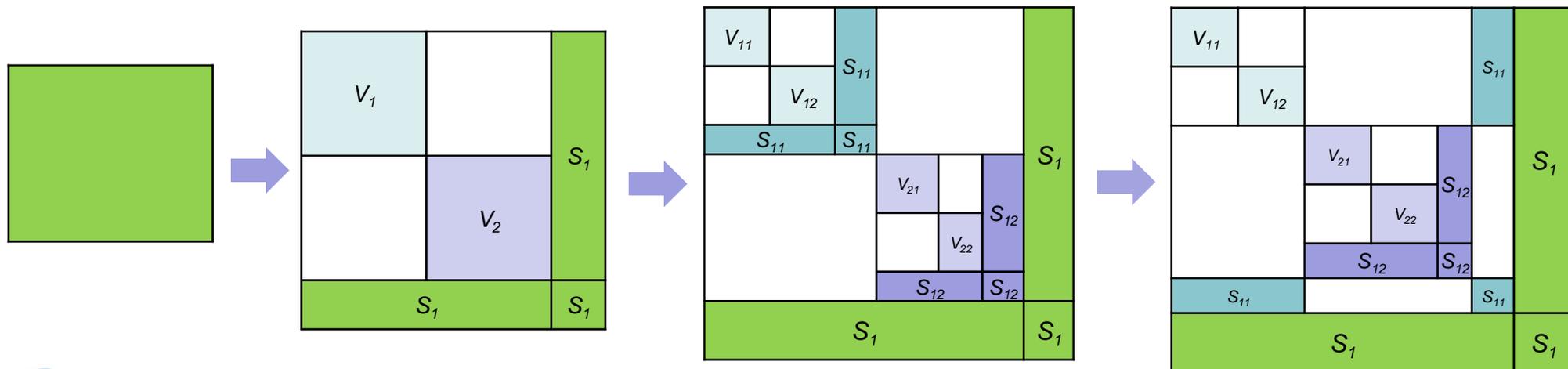


- ❑ Распространенные пакеты: METIS / ParMETIS, Scotch / PT-Scotch, Chaco; переупорядочиватели в составе решателей (MUMPS, MKL, SuperLU...).

# Метод вложенных сечений



Заполнение фактора  $L$ :



# Многоуровневый метод вложенных сечений



# Цели работы

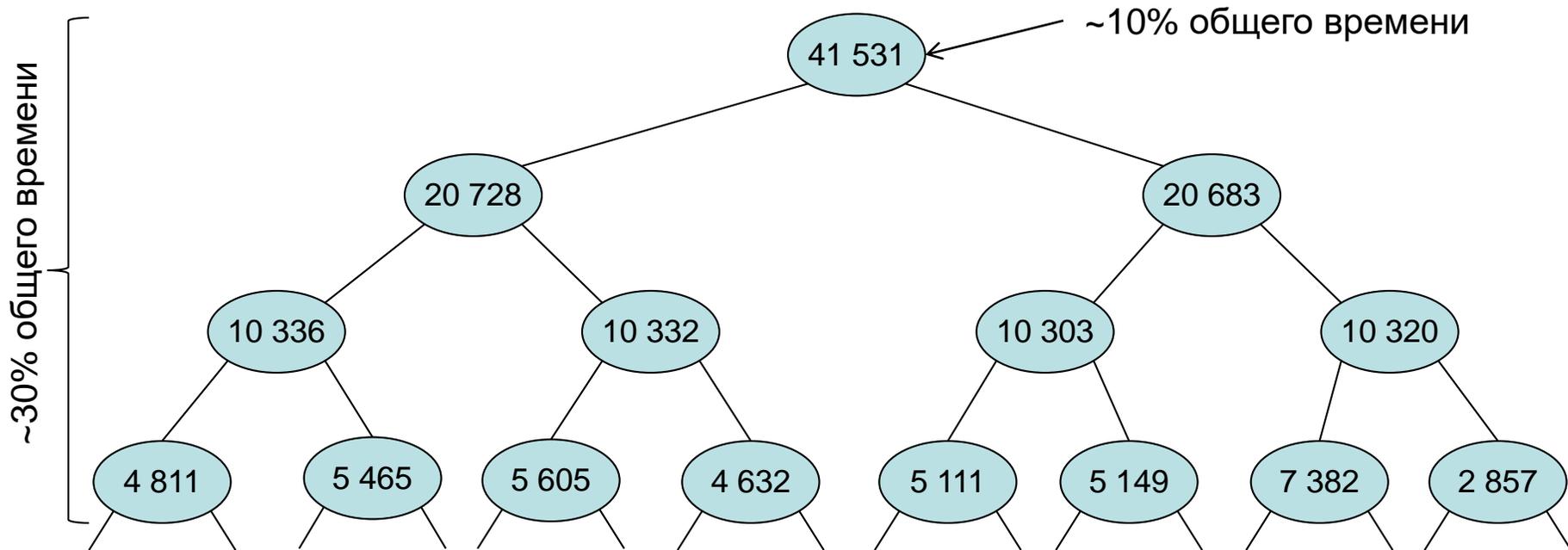
---

- Разработка новых алгоритмов и программных средств для переупорядочения симметричных разреженных матриц
  
- Сделано:
  - уменьшение заполнения (комбинация и модификация известных алгоритмов)
  - параллельная версия для систем с общей памятью
  - интеграция с решателями
  - открытый код версии для систем с общей памятью
  - **параллельная версия для систем с распределенной памятью**



# Сложность распараллеливания

- Дерево независимых подграфов (матрица pwtk):



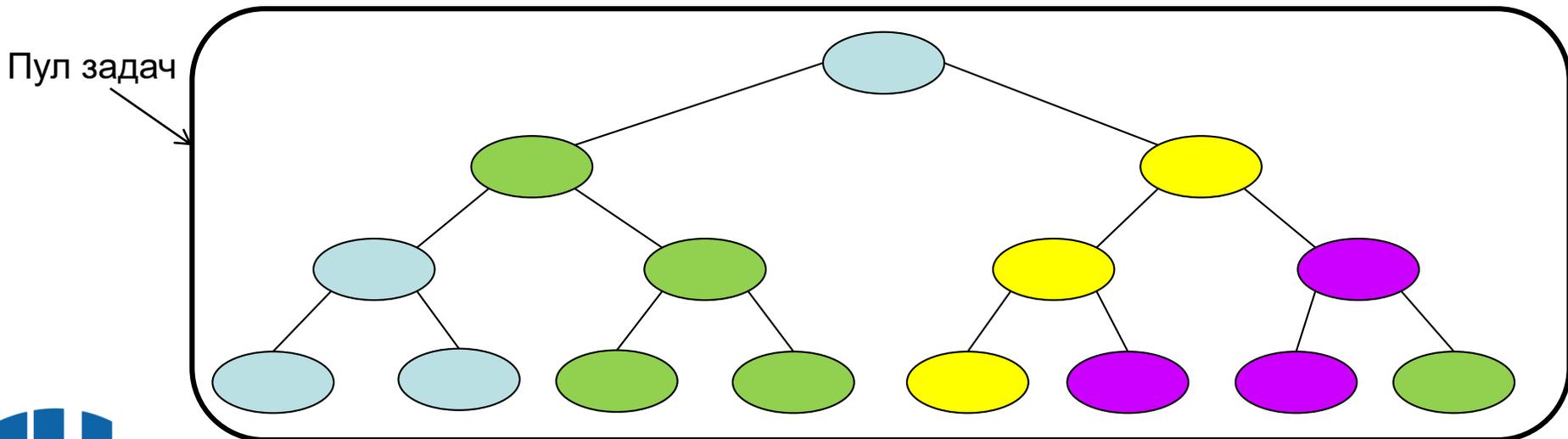
# Программная реализация для систем с общей памятью (1)

- PMORSy – свободно распространяемая библиотека для переупорядочения графов симметричных разреженных матриц  
<http://hpc-education.unn.ru/en/research/overview/sparse-algebra/morsy>
- Основана на многоуровневом методе вложенных сечений
  - язык реализации: C
  - ОС: Windows, Linux
  - параллелизм с использованием OpenMP 3.0



# Программная реализация для систем с общей памятью (2)

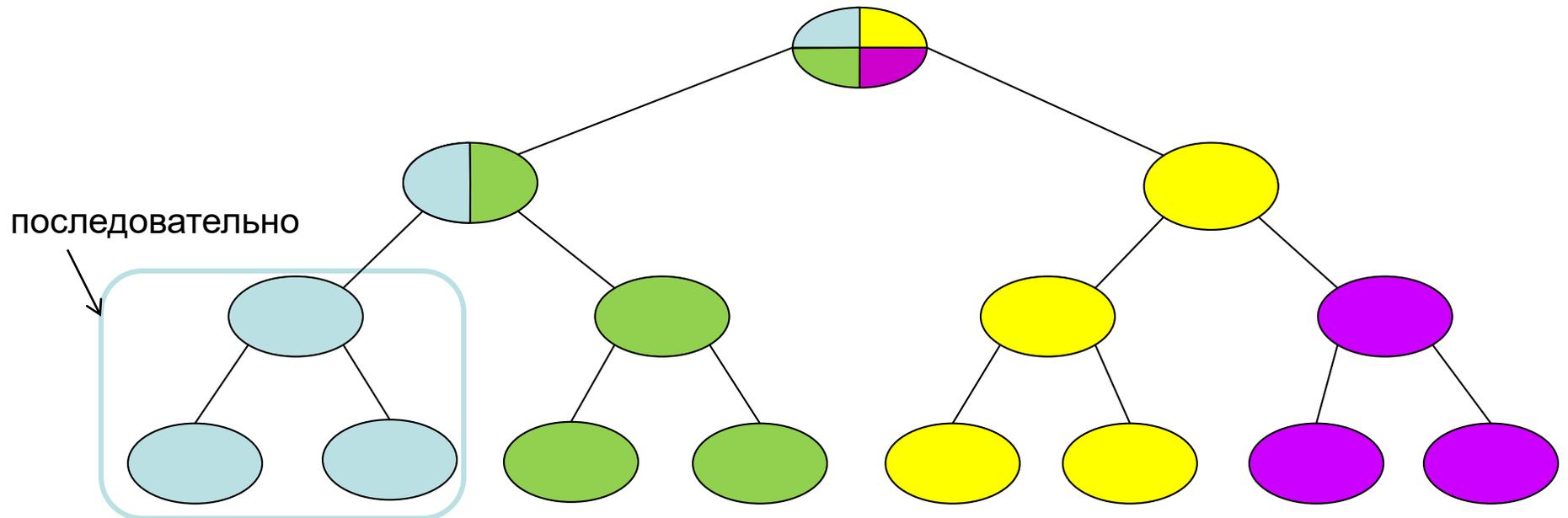
- Особенности параллельного алгоритма:
  - 1 задача = найти разделитель в подграфе
  - Общая очередь задач
  - Новые задачи попадают в очередь **после** выполнения потоком текущей задачи



# Существующие решения для систем с распределенной памятью

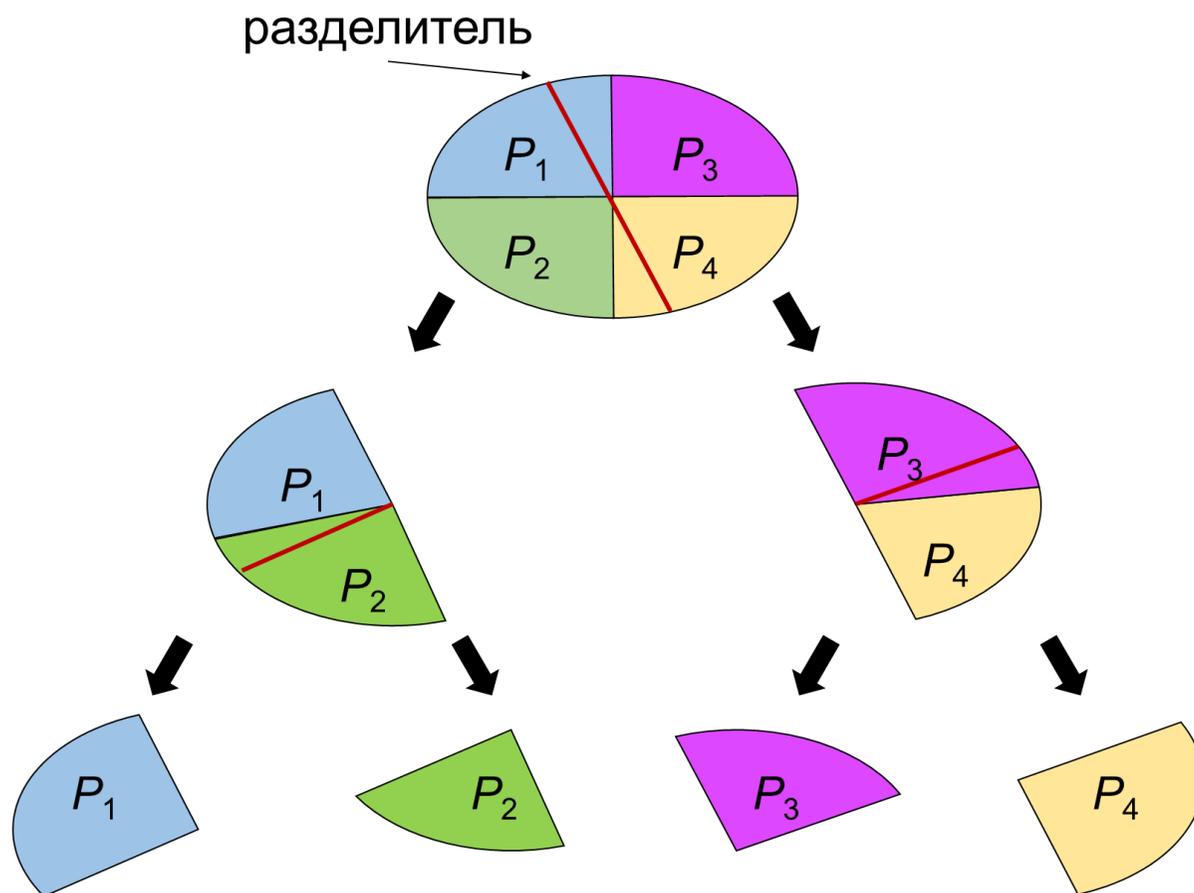
## □ Библиотеки ParMETIS, PT-Scotch

- параллельные этапы многоуровневого метода на первых  $\log p$  шагах переупорядочения, затем – последовательная обработка  $p$  независимых подграфов



# Алгоритм переупорядочения для систем с распределенной памятью (1)

- Распределение графа по процессам



# Методика проведения экспериментов (1)

- Параметры тестового окружения (узлы кластера Лобачевский):

Процессор	Два 8-ядерных процессора Intel Xeon CPU E5-2660 2.2 GHz
Память	128 GB
Операционная система	Linux CentOS 6.4
Компилятор	Intel Parallel Studio XE 2017 Cluster Edition

- Сравнение библиотек:
  - DMORSy (MPI)
  - ParMETIS 4.0.3 (MPI)
  - PT-Scotch 6.0.4 (MPI)



# Методика проведения экспериментов (2)

---

- Анализ масштабируемости:
  - число используемых процессоров: 1, 2, 4
  - число процессов на одном процессоре: 1 – 8 (по количеству доступных вычислительных ядер)
  
- Строки матрицы распределены поровну между процессами, непрерывными полосами
  
- Параметры библиотек по умолчанию



# Методика проведения экспериментов (3)

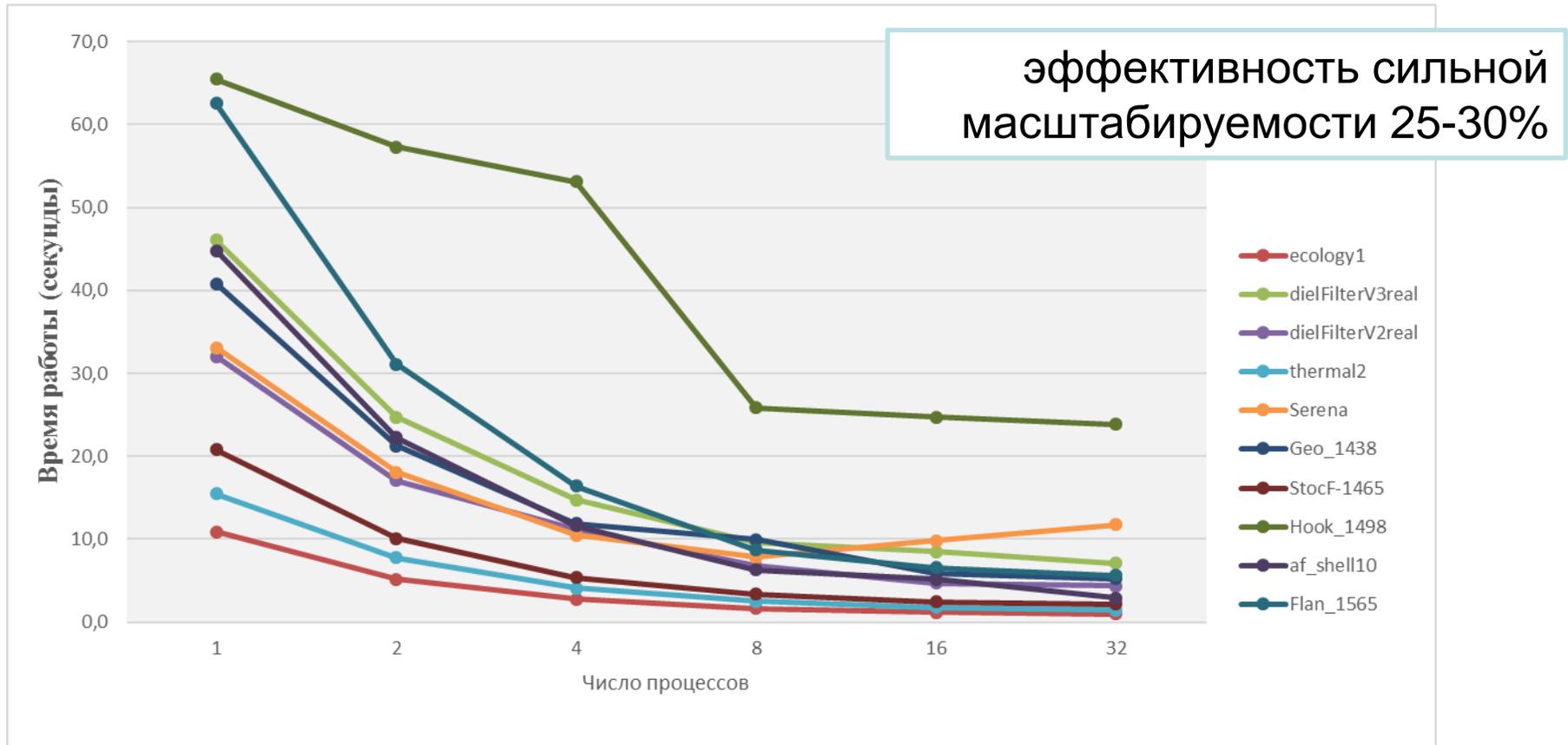
- Тестовые матрицы из коллекции Suite Sparse:

Матрица	Размер (N)	Число ненулевых элементов (NZ)
ecology1	1 000 000	2 998 000
dielFilterV3real	1 102 824	45 204 422
dielFilterV2real	1 157 456	24 848 204
thermal2	1 228 045	4 904 179
Serena	1 391 349	32 961 525
Geo_1438	1 437 960	32 297 325
StocF-1465	1 465 137	11 235 263
Hook_1498	1 498 023	31 207 734
af_shell10	1 508 065	27 090 195
Flan_1565	1 564 794	59 485 419



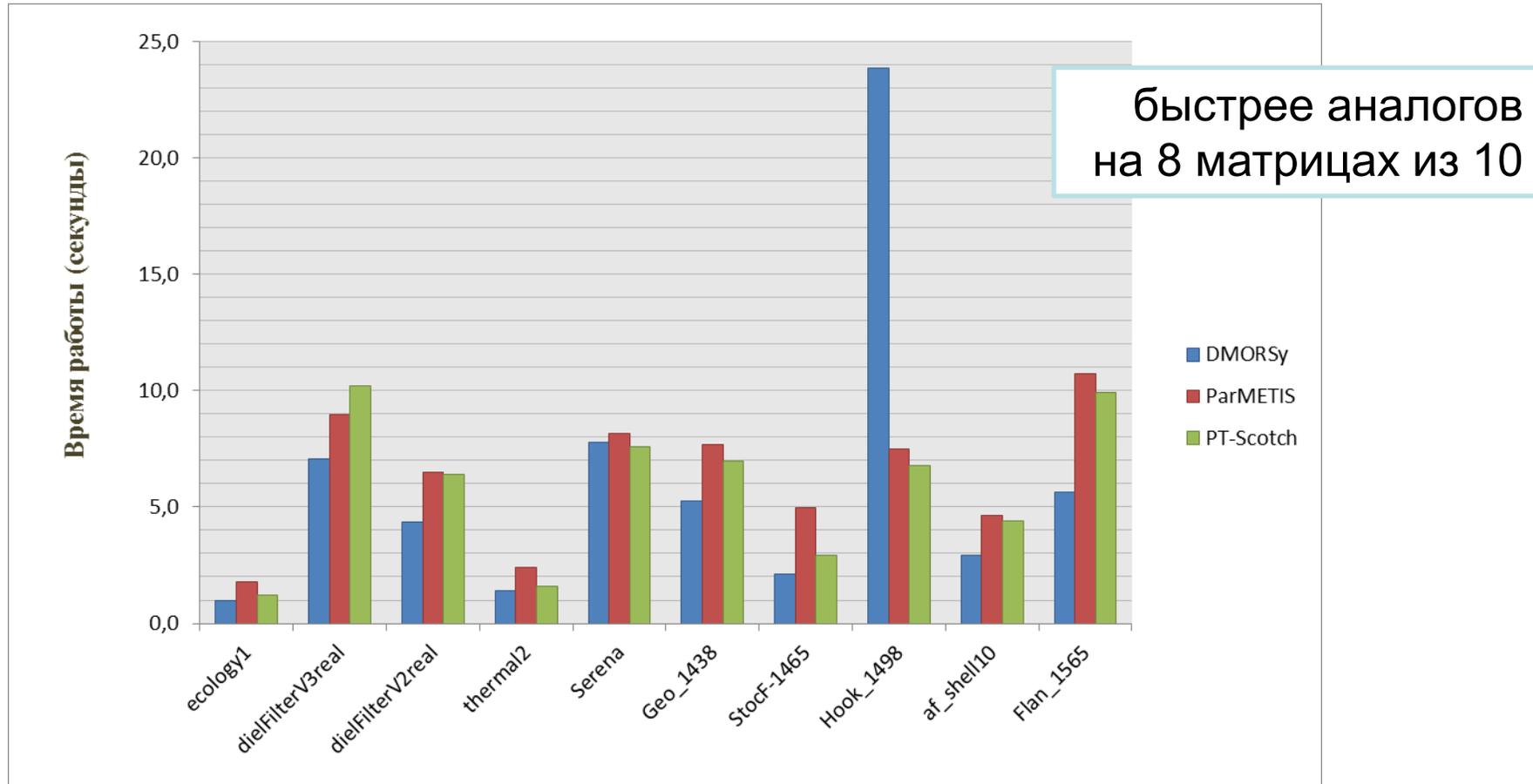
# Вычислительные эксперименты (1)

□ Время работы DMORSy на разном числе процессов



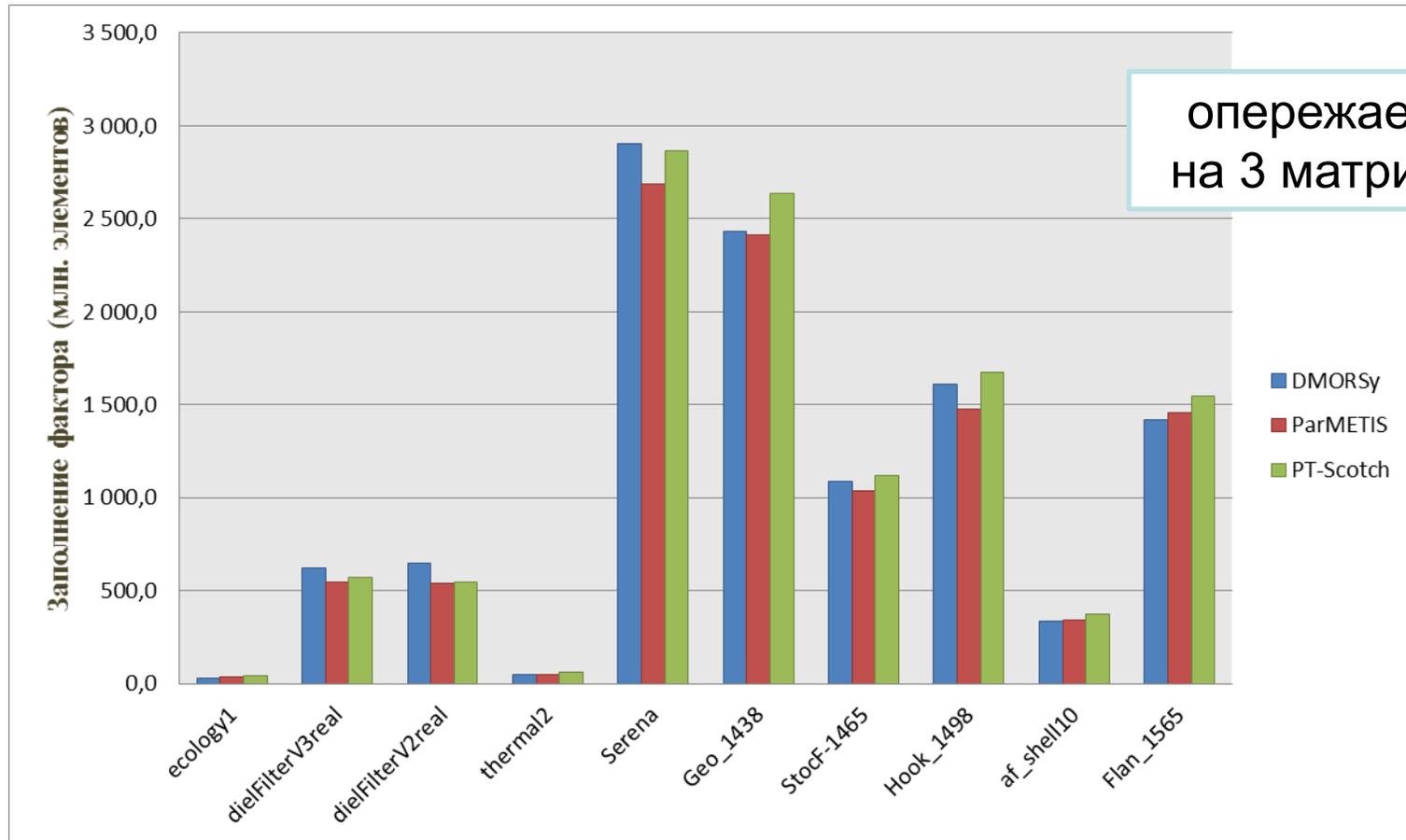
# Вычислительные эксперименты (2)

## □ Лучшее время переупорядочения



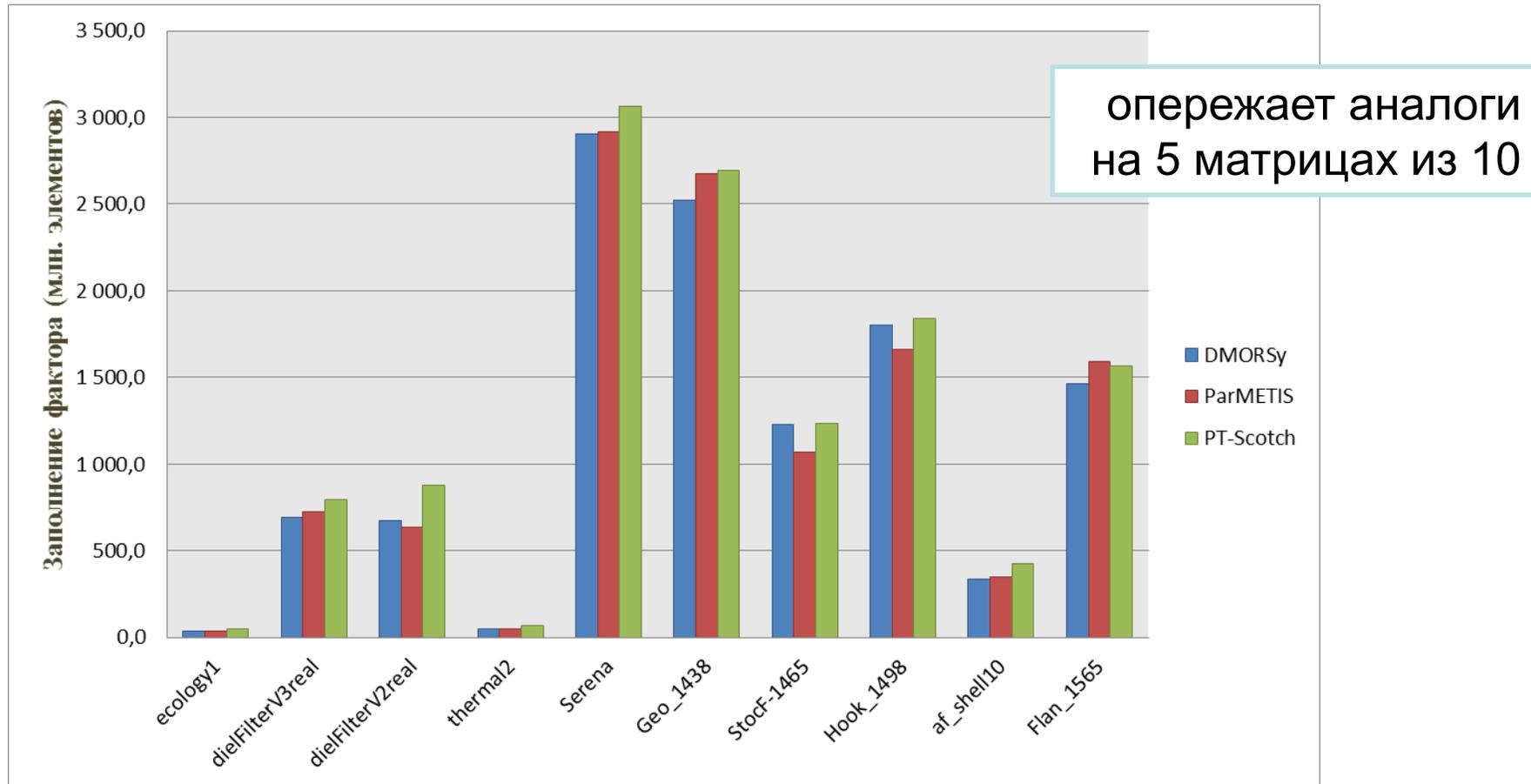
# Вычислительные эксперименты (3)

## □ Лучшее заполнение фактора



# Вычислительные эксперименты (4)

- Заполнение фактора при лучшей производительности



# Выводы

- ❑ Эффективность сильной масштабируемости DMORSy на 32 ядрах – 25-30%, ParMETIS и PT-Scotch – 17%.
- ❑ Для данных матриц использование 32 ядер не оправдано
- ❑ За наименьшее время работы DMORSy позволяет найти лучшие перестановки для 5 матриц. Выигрыш до 9% в сравнении с ParMETIS и до 36% в сравнении с PT-Scotch
- ❑ DMORSy опережает аналоги и по времени, и по качеству на 3 матрицах.
- ❑ При увеличении числа MPI-процессов ухудшается качество перестановок с точки зрения заполнения фактора матриц



# Перспективы развития

---

- Основные направления дальнейших исследований:
  - Оптимизация версии для систем с распределенной памятью (MPI)
  - Разработка гибридной версии (OpenMP + MPI)



# Вопросы

---

□ Вопросы?

***Спасибо за внимание!***

