

Комплекс программ ParSPDE для численного решения стохастических дифференциальных уравнений с частными производными методом статистического моделирования на суперкомпьютере*

Д.Д. Смирнов

Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения Российской академии наук

В работе на примере стохастического уравнения Бюргерса методом статистического моделирования исследуются численные решения стохастических дифференциальных уравнений с частными производными (СДУЧП). Рассчитываются различные вероятностные, частотные и статистические характеристики решений СДУЧП. Приводятся результаты численных экспериментов, проведённых на кластере НКС-30Т Сибирского Суперкомпьютерного центра при ИВМиМГ СО РАН с использованием комплекса программ ParSPDE.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения с частными производными, метод статистического моделирования, параллельные алгоритмы, комплекс программ, стохастическое уравнение Бюргерса, частотное пространственное сечение, частотное временное сечение, статистический портрет решения.

1. Введение

Многие физические явления очень хорошо описываются с помощью стохастических дифференциальных уравнений с частными производными (СДУЧП). Существует много типов СДУЧП, например, линейные и нелинейные уравнения со случайными коэффициентами, со случайными внешними силами, к тому же в начально-краевых задачах для этих уравнений не всегда однозначно заданы начальные условия или краевые условия и могут быть случайными величинами или случайными процессами с заданными распределениями. Так как аналитическое решение СДУЧП часто не удаётся найти, то на первый план выходит изучение численного решения СДУЧП методом статистического моделирования. С помощью этого метода оцениваются различные вероятностные характеристики решения СДУЧП. Для достижения высокой точности оценок вероятностных характеристик решения СДУЧП требуется моделировать большое количество реализаций случайной функции, являющейся решением СДУЧП. Каждая реализация этой случайной функции находится с помощью численного решения СДУЧП, например, с помощью метода конечных разностей. Для того, чтобы разностная схема аппроксимировала исходную дифференциальную задачу с высокой точностью, требуется проводить дискретизацию по пространственным и временным переменным с малыми шагами по пространству и времени. Таким образом, получается система алгебраических уравнений большой размерности, к тому же для более точных оценок вероятностных характеристик решения СДУЧП приходится моделировать миллионы реализаций случайной функции, что приводит к возникновению больших задач. Персональный компьютер не справляется с такими задачами, поэтому требуется использовать суперкомпьютер, на котором можно распараллелить и реализовать параллельные алгоритмы численного решения СДУЧП. В таком случае метод статистического моделирования является универсальным методом анализа численных решений СДУЧП. Моделируя на суперкомпьютере независимые между собой реализации случайной функции, полученные путём численного решения СДУЧП, можно рассчитать любые требуемые оценки вероятностных характеристик решения СДУЧП [1].

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект № 17-01-00698 А и гранта РФФИ проект № 18-01-00599 А.

Практика вычислений показала, что моментные функции и даже плотности распределений не дают полной информации о поведении решений стохастических уравнений [2]. Более информативными являются частотные и статистические обобщения решений, в которых учитывается вся статистика из моделируемого ансамбля реализаций случайной функции. Для анализа свойств решений в данной работе предложены новые частотные и статистические характеристики: ЧПС - частотное пространственное сечение, ЧВС - частотное временное сечение и СПР – статистический портрет решения. Рассчитываемые характеристики решений СДУЧП, прежде всего, должны показать реакцию динамической системы на случайные возмущения, то есть степень уклонения решений стохастических уравнений от решений детерминированных уравнений, а также наличие общих закономерностей в поведении моделируемых траекторий решений СДУЧП, дать возможность проведения сравнений при параметрическом анализе решений.

В данной работе описывается комплекс программ ParSPDE, в котором реализованы параллельные алгоритмы для статистического моделирования СДУЧП и обсуждаются результаты статистического моделирования решений СДУЧП, проведенного на кластере НКС – 30Т Сибирского Суперкомпьютерного Центра при ИВМ и МГ СО РАН. Комплекс программ ParSPDE основан на базе комплекса программ AMKS [3]. В ParSPDE добавлены новые статистические и частотные характеристики: частотное пространственное сечение, частотное пространственно-временное сечение.

2. Описание комплекса программ ParSPDE

С помощью комплекс программ ParSPDE можно проводить расчёты как на персональном компьютере, так и на суперкомпьютере. Это свойство комплекса программ ParSPDE даёт возможность сначала спроектировать необходимые расчёты на персональном компьютере для того, чтобы осуществить отладку программных модулей, подобрать необходимые параметры поставленной задачи и численного метода, используемого для решения поставленной задачи, выбрать подходящие параметры для оценивания вероятностных и статистических характеристик от решения поставленной задачи. Затем спроектированный расчёт выполняется на суперкомпьютере. В комплексе программ ParSPDE реализованы следующие программные модули: стохастическое уравнение переноса, стохастическое уравнение теплопроводности, стохастическое уравнение Бюргерса, стохастическое уравнение Навье-Стокса, стохастические модели солитонов. В комплексе программ ParSPDE для нахождения численного решения СДУЧП реализованы как явные методы, так и неявные. С помощью процедур распараллеливания эти методы распараллелены определённым образом.

Использование комплекса программ ParSPDE на суперкомпьютере даёт возможность решать большие задачи, например стохастическое двумерное уравнение теплопроводности.

Базовым компонентом для распределения статистического моделирования является библиотека ParMONC и установленные компиляторы MPI-программ на языке C, например, mpicc от OpenMPI или mpiicc от Intel [4]. Если моделирование отдельных реализаций осуществляется независимо на разных процессорах, то при назначении псевдослучайных чисел по процессорам или вычислительным ядрам используется распределённый способ. Для массивно-параллельной вычислительной системы моделирование отдельных реализаций осуществляется независимо на разных процессорах. Для гибридных вычислительных систем моделирование отдельных реализаций осуществляется независимо как на вычислительных ядрах основного процессора, так и на вычислительных ядрах сопроцессора.

В библиотеке ParMONC для получения базового псевдослучайного числа, равномерно распределённого в интервале (0,1), используется функция **rnd128** [1]. Эти базовые псевдослучайные числа моделируются следующим образом: $u_0 = 1$, $u_n \equiv u_{n-1}A \pmod{2^{128}}$, $\alpha_n = u_n 2^{-128}$, $n = 1, 2, \dots$, где $A \equiv 5^{100109} \pmod{2^{128}}$. Это 128-битный конгруэнтный датчик псевдослучайных чисел. Последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ является периодической с длиной периода $L = 2^{126} \approx 10^{38}$. Для распределения псевдослучайных чисел между разными процессорами используется bf-генератор (big-frog-генератор). Выбирается значение прыжка μ генератора из соображений, чтобы μ псевдослучайных чисел хватало для моделирования на каждом процессоре. Последовательность $\{u_n\}$ разбивается на подпоследовательности длины μ , начинающиеся с чи-

сел $u_{m\mu}$, $m = 0, 1, \dots$, где m – номер процессора. Разные подпоследовательности используются на разных процессорах, таким образом значение $u_{m\mu}$ находится по формуле $u_{(m+1)\mu} = u_{m\mu} A_\mu \pmod{2^{128}}$, где $A_\mu = A^\mu \pmod{2^{128}}$, тогда для моделирование на m -ом процессоре используется формула $\alpha_{m\mu} = u_{m\mu} 2^{-128}$. Для bf-генератора рекомендуемое значение прыжка $\mu = 10^{26} \approx 2^{86}$. Таких количеств псевдослучайных чисел для каждого процессора и избытком хватает для вычислительных потребностей. Для коррелирования результатов решения различных задач целесообразно использовать следующий порядок псевдослучайных чисел, называемый lf-генератор (little-frog-генератор). На m -ом процессоре соответствующая ему подпоследовательность дополнительно разбивается на подпоследовательности длины d , начинающиеся с чисел $u_{(m-1)\mu+ld}$, $l = 0, 1, \dots$ и каждая подпоследовательность используется для вычисления соответствующих выборочных траекторий моделируемого процесса. Значение d выбирается из соображений, чтобы d псевдослучайных чисел хватало для построения одной траектории. Для моделирования на m -ом процессоре начальных значений для lf-генератора используется формула $u_{(m-1)\mu+ld} = u_{(m-1)\mu+(l-1)d} A^d \pmod{2^{128}}$, $l = 0, 1, \dots$.

Комплекс программ ParSPDE соответствует модели «клиент-сервер», который состоит из управляющего программного блока («клиент») и вычислительного программного блока («сервер»). Управляющий блок устанавливается на персональном компьютере и состоит из двух объектов: объект «Задача» и объект «Расчёт». В объект «Задача» входят данные о параметрах поставленной задачи: границы пространственно-временной области, шаги дискретизации по пространственным и временным переменным, начальные условия, краевые условия, интенсивности случайных шумов, возникающих в постановке задачи, количество моделируемых реализаций и т.д. В объект «Расчёт» входят данные о количестве процессоров для запуска поставленной задачи на суперкомпьютере, максимальное время работы программы, номер подпоследовательности для параллельного генератора псевдослучайных чисел. Совокупность параметров исполнения параллельной программы (количество реализаций, количество процессоров (вычислительных ядер) для запуска параллельной программы (для суперкомпьютера), максимальное время счёта и другие параметры, специфичные для конкретного суперкомпьютера) на любой вычислительной системе будем называть «Расчёт». Вычислительный блок устанавливается на персональный компьютер или на суперкомпьютер (содержит библиотеку PARMONC) и производит расчёт задачи, подготовленной в управляемом блоке. Вся информация об объектах «Задача» и «Расчёт» сохраняется в управляющем блоке на жестком диске. Открытие, просмотр и редактирование сохраненной информации осуществляется в управляющем блоке с помощью графического интерфейса.

Одному объекту «Задача» может соответствовать несколько объектов «Расчёт» (при каждом запуске на счёт используются данные только одного из объектов «Расчёт»). При этом из управляющего блока возможно независимо определять и запускать на счёт несколько задач, для которых контроль исполнения и обработка результатов также осуществляются независимо друг от друга.

Для объекта «Расчёт» и соответствующего ему объекта «Задача» пользователь сначала выбирает, где будет производиться данный расчёт: на персональном компьютере или суперкомпьютере.

Для объекта «Расчёт» определяется вид расчёта: «Новый» или «Продолжение». Вид расчёта «Новый» применяется в случае, когда нужно получить новые результаты расчётов для поставленной задачи, а полученные ранее результаты (для завершённой задачи) можно не учитывать. Вид расчёта «Продолжение» применяется в случае, когда необходимо для завершённой задачи с целью уменьшения статистической погрешности полученных ранее оценок моделировать новые независимые реализации.

После определения данных для объектов «Задача» и «Расчёт» пользователь в разделе меню «Команды» отдаёт команду «запустить программу на счёт на персональном компьютере», «запустить программу на счёт на суперкомпьютере». В управляющем блоке автоматически формируются программа, соответствующая вычислительной системе и файлы с входными параметрами.

Задача считается завершённой, если соответствующие объектам «Задача» и «Расчёт» вычисления на персональном компьютере и суперкомпьютере закончены и их результаты сохранены в управляющем блоке.

В разделе меню «Команды» для пользователя есть возможность следить за ходом выполнения поставленной задачи на суперкомпьютере: просматривать очередь заданий на суперкомпьютере, просматривать содержимое рабочего каталога задачи, контролировать статистическую погрешность оценок функционалов в процессе расчётов. Если пользователю необходимо получить промежуточные результаты расчётов, то по соответствующей команде в управляющий блок копируются файлы с результатами расчётов из вычислительного блока, количество и состав которых определяются методологией библиотеки PARMONC.

После обработки полученных результатов счёта пользователь может посмотреть файлы с результатами расчётов и посмотреть двумерные и трехмерные графики, визуализация которых также реализована в ParSPDE.

Для решения каждой поставленной задачи автоматически создается отдельный рабочий каталог для размещения параллельной программы, файлы с входными параметрами, а также файлы с результатами расчётов. После запуска задачи на счёт в вычислительном блоке, пользователь может закрыть комплекс программ ParSPDE в управляющем блоке, при этом счёт на суперкомпьютере для запущенной задачи будет продолжаться. После завершения счёта пользователь, используя команду «Получить результаты расчёта», получает файлы с результатами расчёта для дальнейшей обработки и визуализации.

2. Уравнение Бюргерса

Первоначально параболическое уравнение Бюргерса (или одномерное уравнение Навье-Стокса) было предложено в качестве модели для описания движения жидкости. Впоследствии оказалось, что эта модель хорошо описывает динамику нелинейно-диссипативных сред различной физической природы, а также помогает при изучении широкого класса процессов в гидродинамике, нелинейной акустике и физике плазмы [5]. В некоторых частных случаях удаётся получить точные решения нелинейного уравнения Бюргерса, однако в общем виде точное решение не найдено [6]. Если в правую часть уравнения Бюргерса добавить источник, то оно будет описывать динамику физической системы с "подкачкой" энергии, находящуюся во внешнем поле. А если в качестве источника рассматривать случайные внешние или внутренние возмущения, то перейдем от обычного детерминированного дифференциального уравнения к стохастическому.

2.1 Постановка задачи для уравнения Бюргерса

Уравнение Бюргерса является дифференциальным уравнением с частными производными и в одномерном по пространству случае имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T.$$

Если заданы начальные условия в виде:

$$U(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t = 0,$$

а на границах $x = 0$ и $x = L$ заданы значения искомой функции $U(x, t)$ в виде:

$$U(0, t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$U(L, t) = \varphi_L(t), \quad x = L, \quad 0 < t \leq T,$$

то есть граничное условие первого рода, то задачу называют первой начально-краевой задачей для уравнения Бюргерса.

Здесь $U(x, t)$ - скалярная функция в пространственно-временной области $\mathbb{X} \times \mathbb{T} = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T\}$, ν - коэффициент, который характеризует кинематическую вязкость среды. С помощью функции $\psi(x)$ задают значения функции $U(x, t)$ на всей пространственной области в начальный момент времени $t = 0$, а с помощью функций $\varphi_0(t)$ и $\varphi_L(t)$ задают значения функции $U(x, t)$ на границах области $x = 0$ и $x = L$.

Если $F(x, t) \neq 0$, то есть уравнение Бюргерса с источником, то такое уравнение описывает динамику физической системы, находящейся во внешнем поле или систему с подкачкой энер-

гии. В работах [7-8] делается попытка получить аналитическое решение уравнения Бюргерса при разных видах источника $F(x, t)$. В некоторых частных случаях вида источника $F(x, t)$ удаётся найти аналитическое решение, но в общем случае это сделать не удаётся. Особенно, не предложен общий подход для анализа решений и описания динамики таких систем в случае, если источник $F(x, t)$ является случайной функцией. В этом случае на первый план выходит численное статистическое моделирование. В данной работе источником $F(x, t)$ будет являться производная винеровского процесса $W(t)$, зависящего только от переменной t , с заданной интенсивностью σ . Винеровский процесс $W(t)$ относится к классу случайных процессов с независимыми приращениями и $W(t) - W(s) \in \mathbb{N}(0, \sigma^2(t - s))$ для любых $0 \leq s < t < \infty$, где $\mathbb{N}(0, \sigma^2(t - s))$ обозначает нормальное распределение с математическим ожиданием равным нулю и дисперсией $\sigma^2(t - s)$. Такой вид источника $F(x, t)$ выбран потому, что после дискретизации по пространственной переменной x , получается классический вид задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито, куда входит дифференциал от винеровского процесса. В дальнейшем планируется изучать решение уравнения Бюргерса с источником $F(x, t)$, обладающим более сложными вероятностными характеристиками, например, когда его отдельные реализации будут зависимы и эти алгоритмы будут соответственно реализованы в комплексе программ ParSPDE. В данной же работе хоть реализации численного решения уравнения Бюргерса и независимы, но для того, чтобы с высокой точностью оценить вероятностные характеристики от численного решения уравнения Бюргерса, требуется моделировать миллиарды его реализаций, что на первый план выводит качество статистических свойств датчика псевдослучайных чисел. В комплекс программ ParSPDE входит библиотека ParMONC, ядром которой является тщательно протестированный, быстрый длиннопериодный датчик псевдослучайных чисел, разработанный в ИВМ и МГ СО РАН.

2.2 Построение дискретного стохастического уравнения для уравнений Бюргерса

На пространственно-временной области $X \times T = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T\}$ введём сетку $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}; t^k = k\tau, k = \overline{0, K}\}$ с пространственным шагом $h = \frac{L}{N}$ и с временным шагом $\tau = \frac{T}{K}$. Сеточной функцией первой начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса U_i^k называется однозначное отображение целых аргументов i и k в значение функции $U_i^k = U(x_i, t^k)$. На введённой сетке сеточная функция U_i^k известна, а сеточная функция U_i^{k+1} подлежит определению. Аппроксимируем дифференциальные операторы по пространственной переменной x отношением конечных разностей следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(i) = \frac{U_{i+1}^k - U_i^k}{h} + O(h),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(i) = \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + O(h^2).$$

Подставляя выражения для производных по пространственной переменной x в начально-краевую задачу для уравнения Бюргерса, получим задачу Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито в виде:

$$U_0(t) = \varphi_0(t),$$

$$dU_i(t) = \left(-U_i(t) \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} + \nu \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2} \right) dt + \sigma_i(U_i(t)) dW(t), \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$U_N(t) = \varphi_L(t),$$

с начальными данными $U_i(0) = \psi(x_i), i = \overline{0, N}$.

Простейшим и наименее трудоёмким численным методом решения задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито является обобщённый явный метод Эйлера, применяя который получим разностную схему в виде:

$$U_0^k = \varphi_0(t^k), \quad k = \overline{1, K},$$

$$U_i^{k+1} = U_i^k + \left(-U_i^k \frac{U_{i+1}^k - U_i^k}{h} + \nu \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} \right) \tau + \sigma_i(U_i^k) \sqrt{\tau} \xi_i^{k+1}(m), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1},$$

$$m = \overline{1, M},$$

$$U_N^k = \varphi_L(t^k), \quad k = \overline{1, K},$$

с начальными данными $U_i^0 = \psi(x_i), i = \overline{0, N}$.

Здесь $\xi_i^k(m)$ – последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин, которые для нечётных m моделируются по формуле $\sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin 2\pi\alpha_2$, а для чётных m моделируются по формуле $\sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2$, где α_1, α_2 – независимые случайные величины, равномерно распределённые в интервале $(0,1)$ и генерируемые с помощью датчика псевдослучайных чисел.

2.3 Частотные и статистические характеристики для решения стохастических уравнений в частных производных

Допустим, из каких-то соображений известны распределения параметров, входящих в уравнение или интенсивности шумов, входящих в уравнение и известны распределения начальных условий или граничных условий. В этом случае численное статистическое моделирование СДУЧП позволит нам сделать выводы о динамике процесса, описываемого этим уравнением.

Будем использовать частотное пространственное сечение (ЧПС), частотное временное сечение (ЧВС), статистический портрет решения. Введём формальное определение статистических характеристики, указанных выше.

Частотное пространственное сечение (ЧПС):

На области $\mathbb{T} \times \mathbb{U} = \{T_0 \leq T \leq T_{end}; U_0 \leq U \leq U_{end}\}$ введём сетку $\omega_{h_T h_U} = \{T_i = T_0 + ih_T, i = \overline{0, N_T}; U_j = U_0 + jh_U, j = \overline{0, N_U}\}$ с шагом $h_T = \frac{T_{end}-T_0}{N_T}$ и с шагом $h_U = \frac{U_{end}-U_0}{N_U}$. Границы области $T_0, T_{end}, U_0, U_{end}$ и количество узлов сетки $N_T + 1, N_U + 1$ вводятся произвольно. ЧПС строится следующим образом: выбирается пространственная координата x_* и вычисляется количество пар $(t^k, U(x_*, t^k))$, попавших в (T_i, U_j) площадку сетки $\omega_{h_T h_U}$ для всех моментов времени $t^k, k = \overline{0, K}$ и для всех смоделированных траекторий $m = \overline{1, M}$. $W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (t^k, U(x_*, t^k)) \in (T_i, U_j), k = \overline{0, K}, m = \overline{1, M}\}$, где индексы i и j площадки (T_i, U_j) сетки $\omega_{h_T h_U}$ определяются следующим образом: $i = \left[\frac{t^k - T_0}{h_T} \right], j = \left[\frac{U(x_*, t^k) - U_0}{h_U} \right]$, где $[]$ – целая часть числа.

Частотное временное сечение (ЧВС):

На области $\mathbb{X} \times \mathbb{U} = \{X_0 \leq X \leq X_{end}; U_0 \leq U \leq U_{end}\}$ введём сетку $\omega_{h_X h_U} = \{X_i = X_0 + ih_X, i = \overline{0, N_X}; U_j = U_0 + jh_U, j = \overline{0, N_U}\}$ с шагом $h_X = \frac{X_{end}-X_0}{N_X}$ и с шагом $h_U = \frac{U_{end}-U_0}{N_U}$. Границы области $X_0, X_{end}, U_0, U_{end}$ и количество узлов сетки $N_X + 1, N_U + 1$ вводятся произвольно. ЧВС строится следующим образом: выбирается момент времени t^* и вычисляется количество пар $(x_i, U(x_i, t^*))$, попавших в (X_i, U_j) площадку сетки $\omega_{h_X h_U}$ для всех пространственных координат $x_i, i = \overline{0, N}$ и для всех смоделированных траекторий $m = \overline{1, M}$. $W = \{W_{ij} | W_{ij} - \text{количество пар } (x_i, U(x_i, t^*)) \in (X_i, U_j), i = \overline{0, N}, m = \overline{1, M}\}$, где индексы i и j площадки (X_i, U_j) сетки $\omega_{h_X h_U}$ определяются следующим образом: $i = \left[\frac{x_i - X_0}{h_X} \right], j = \left[\frac{U(x_i, t^*) - U_0}{h_U} \right]$, где $[]$ – целая часть числа.

Статистический портрет решения:

$\langle U(x_i, t^k) \rangle = \frac{\sum_{m=1}^M (U(x_i, t^k))_m}{M}, i = \overline{0, N}, k = \overline{0, K}$, где $m = \overline{1, M}$ – количество смоделированных траекторий.

2.4 Численные эксперименты

Численные расчёты для стохастического уравнения Бюргерса проводились в пространственно-временной области $[0,1] \times [0,20]$ с начально-краевыми условиями:

$$u(x, 0) = 0.1,$$

$$u(0, t) = \sin 2\pi t, (t > 0),$$

$$u(1, t) = \cos 2\pi t, (t > 0),$$

с шагом по пространству $h = 10^{-2}$ и с шагом по времени $\tau = 10^{-3}$, интенсивности всех аддитивных шумов 0.1. Моделировалось 10^6 реализаций.

На рис.1 приведены графики ЧВС (вид сверху) стохастического уравнения Бюргера для момента времени $t^* = 5$ и момента времени $t^* = 15$. Как видно из графиков, при одинаковой интенсивности аддитивных шумов разброс траекторий больше в более поздние моменты времени. (Более жёлтый цвет показывает большую концентрацию траекторий в заданной области, то есть уменьшение концентрации идёт от жёлтого к зелёному).

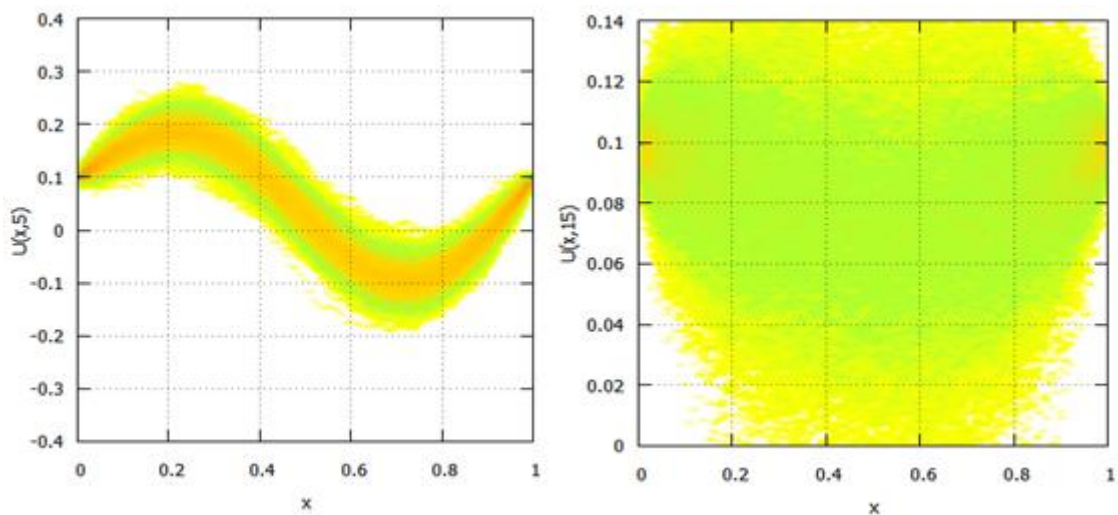


Рис. 1. ЧВС

На рис. 2 приведён графики СПР стохастического уравнения Бюргера.

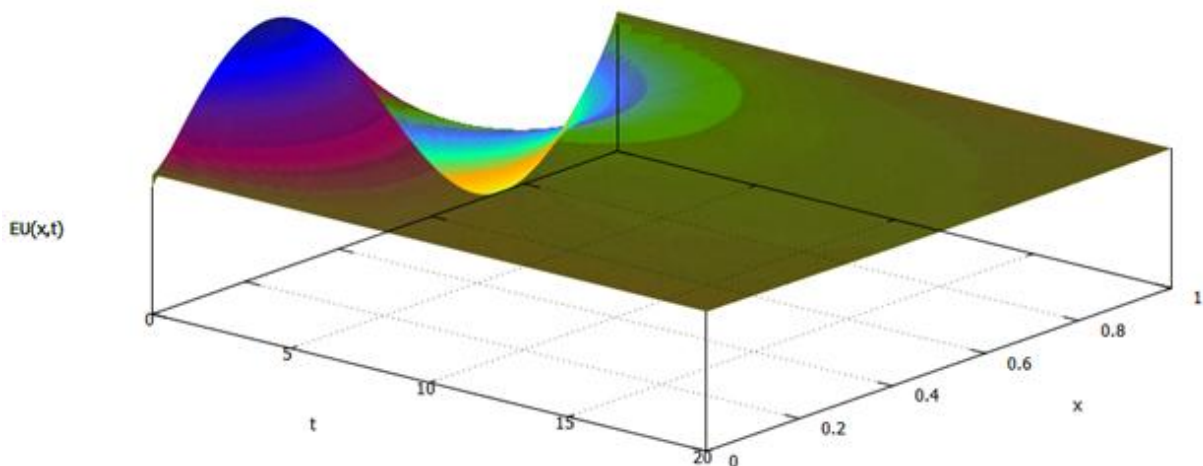


Рис. 2. СПР

На рис.3 и рис. 4 приведены пространственное сечение численного решения детерминированного уравнения Бюргера и его частотный аналог ЧПС (вид сбоку) для стохастического уравнения Бюргера соответственно в точке пространства $x_* = 0.8$. Как видно из графиков, наибольшая концентрация траекторий сосредоточена в окрестности начальных данных, затем по мере продвижения по временной переменной траектории расплываются и таким образом можно увидеть влияние аддитивного шума с заданной интенсивностью на каждую траекторию из всего ансамбля моделируемых траекторий.

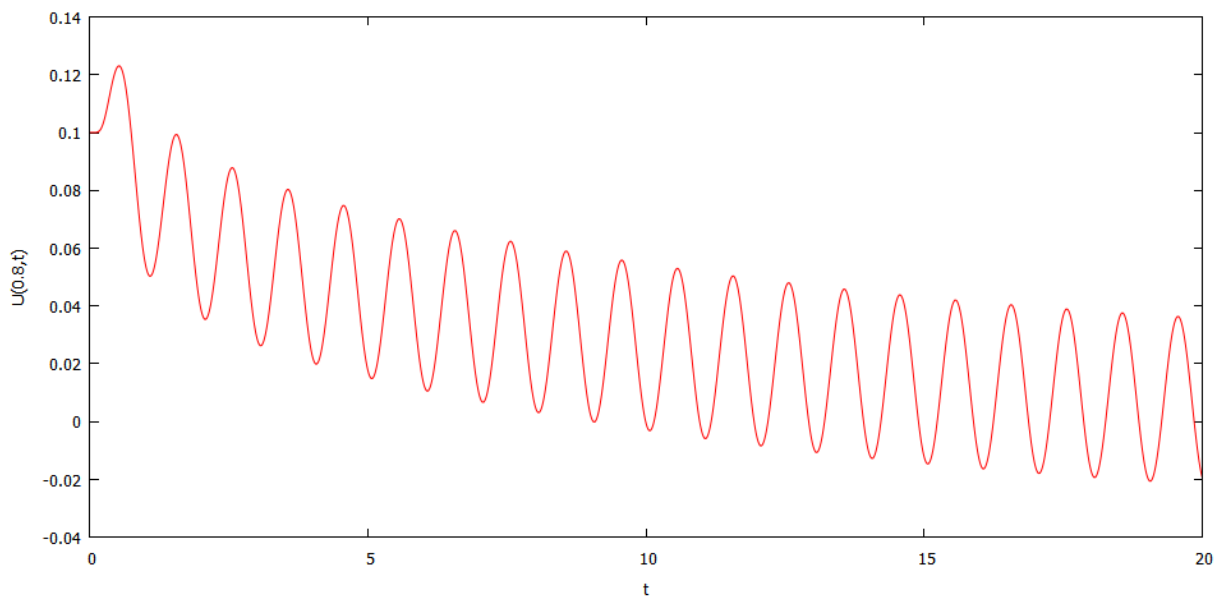


Рис. 3. Пространственное сечение

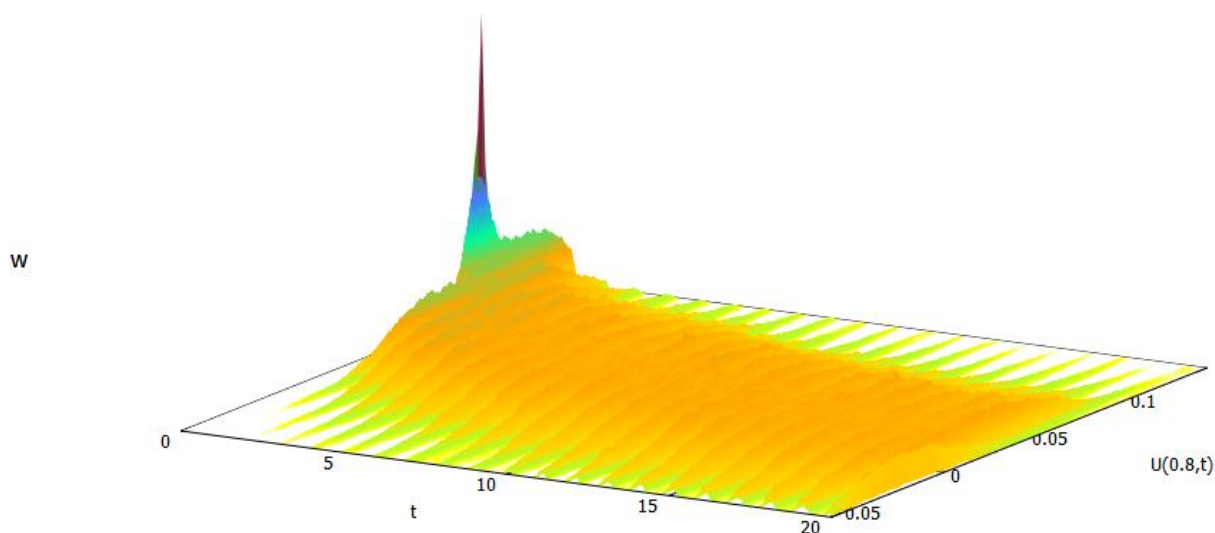


Рис. 4. ЧПС

На рис. 5 и рис. 6 приведены временное сечение численного решения детерминированного уравнения Бюргера и его частотный аналог ЧВС (вид сверху) для стохастического уравнения Бюргера соответственно в момент времени $t^* = 5$. Как видно из графиков, отклонение траекторий стохастического уравнения Бюргера от траектории детерминированного уравнения Бюргера при влиянии аддитивного шума с заданной интенсивностью нет аномально отклоняющихся траекторий с большим разбросом.

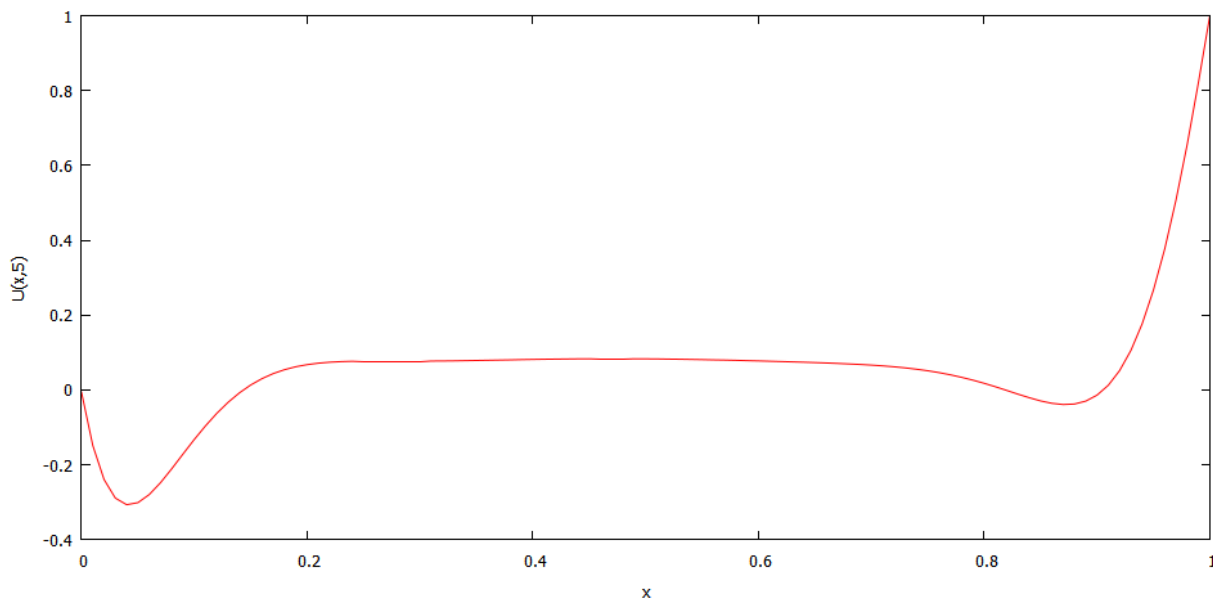


Рис. 5. Временное сечение

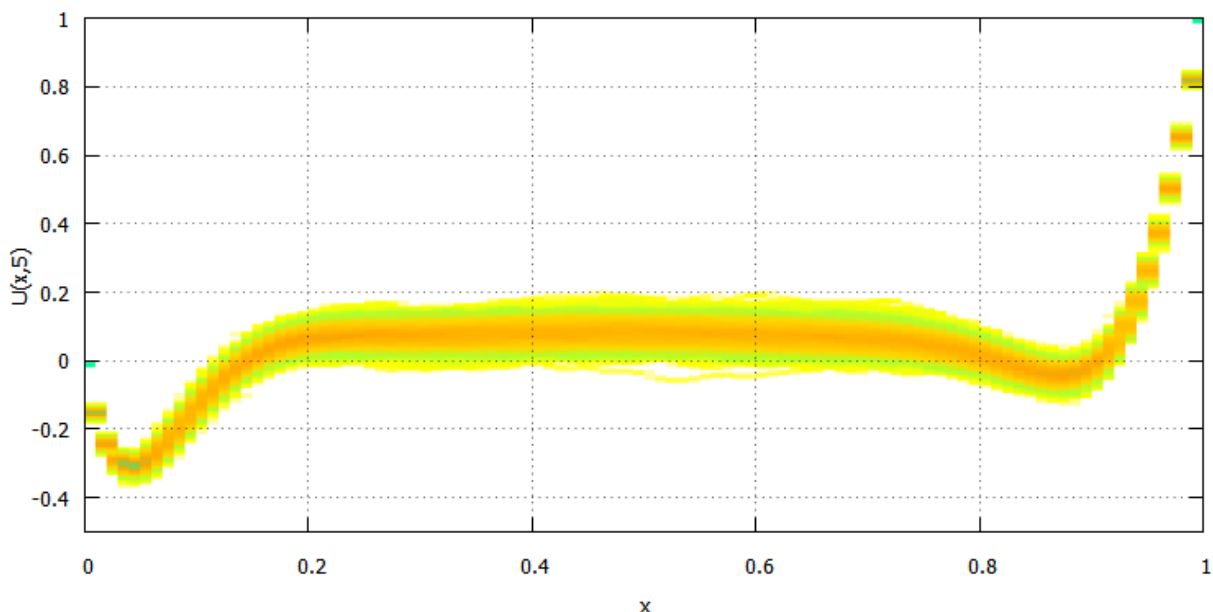


Рис. 6. ЧВС

Время счёта последовательной программы $T_1 = 16$ часов. Время счёта программы на 8 процессорах $T_8 = 2.2$ часа. Ускорение $S = \frac{T_1}{T_8} = 7.27$, Эффективность $E = \frac{T_1}{8 \cdot T_8} = 0.91$. Время счёта программы на 16 процессорах $T_{16} = 1.11$ часа. Ускорение $S = \frac{T_1}{T_{16}} = 14.4$, Эффективность $E = \frac{T_1}{16 \cdot T_{16}} = 0.9$. Время счёта программы на 32 процессорах $T_{32} = 0.57$ часа. Ускорение $S = \frac{T_1}{T_{32}} = 28.1$, Эффективность $E = \frac{T_1}{32 \cdot T_{32}} = 0.87$. Время счёта программы на 64 процессорах $T_{64} = 0.29$ часа. Ускорение $S = \frac{T_1}{T_{64}} = 55.2$, Эффективность $E = \frac{T_1}{64 \cdot T_{64}} = 0.86$. Время счёта программы на 128 процессорах $T_{128} = 0.15$ часа. Ускорение $S = \frac{T_1}{T_{128}} = 106.7$, Эффективность $E = \frac{T_1}{128 \cdot T_{128}} = 0.83$.

2.5 Выводы

Для анализа численных решений СДУЧП были разработаны и построены, частотное пространственное сечение, частотное временное сечение, статистический портрет решения. На приведенных графиках можно оценить степень влияния случайных возмущений на решение детерминированного уравнения Бюргера. Из графиков частотных и статистических характеристик можно получить наглядную информацию о поведении СДУЧП. По графику ЧПС для заданной пространственной координаты мы видим распределение всех траекторий численного решения СДУЧП во все моменты времени. По графику ЧВС для заданного момента времени мы видим распределение всех траекторий численного решения СДУЧП во всех пространственных координатах. По графику статистического портрета решений мы видим поведение усреднённого по всем траекториям численного решения СДУЧП. Таким образом, новые статистические характеристики представляются нам очень информативными для дальнейшего анализа численных решений СДУЧП. Кроме того, алгоритмы статистического моделирования очень хорошо распараллеливаются ввиду того, что на разных процессорах моделируются независимые между собой траектории случайной функции, являющейся решением СДУЧП. Для расчётов использовался комплекс программ ParSPDE, в который были включены новые частотные и статистические характеристики для анализа численных решений СДУЧП. Комплекс программ ParSPDE показал свою эффективность и удобный интерфейс для решения больших задач на суперкомпьютере. Также комплекс программ ParSPDE эффективен и для параметрического анализа численного решения СДУЧП, когда требуется решать одну и ту же задачу с разными значениями параметров.

Литература

1. Артемьев С.С., Марченко М.А., Корнеев В.Д., Якунин М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Анализ стохастических колебаний методом Монте-Карло на суперкомпьютерах. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016. 294 с. ISBN: 978-5-7692-1499-8.
2. Артемьев С.С., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений, Сиб. журн. вычисл. матем., 18:1 (2015), 15–26; Num. Anal. Appl., 8:1 (2015), 13–22.
3. Марченко М.А., Иванов А.А., Смирнов Д.Д. Комплекс программ AMKS для численного решения СДУ методом Монте-Карло на суперкомпьютерах // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22. № 3. С. 61-70.
4. Марченко М.А. Библиотека ParMONK для решения «больших» задач по методу Монте-Карло, Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2012, 392–397 elib.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. Петровский С.В. Точные решения уравнения Бюргера с источником // Журнал технической физики. – 1999, Т. 69, вып. 8, с. 11-14.
7. Ablowitz M.J., De Lillo S. Forced and semiline solutions of the Burgers equation // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 156. P. 483–487.
8. Chekhlov A., Yakhot V. Kolmogorov turbulence in a random-force-driven Burgers equation: Anomalous scaling and probability density functions // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 5681–5684.